CONCOURS D'ENTRÉE

1979

OPTION : PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

DEUXIEME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Ce sujet comporte 3 pages de texte

Il est recommandé aux candidats :

1) de bien lire l'énoncé afin d'éviter toute confusion dans les notations ;
2) de vérifier soigneusement leurs calculs avant d'en utiliser les résultats dans la suite du problème.

I

L'espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 est rapporté à une base orthonormée $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par leurs composantes dans cette base : $\vec{u}\ (1, 1, 0)$ $\vec{v}\ (-1, 1, 0)$.

A tout couple de réels (α, θ) , on associe une rotation vectorielle R déterminée de la manière suivante :

- l'angle de la rotation est θ ;
- l'axe de la rotation est défini par le vecteur unitaire

$$\vec{k'} = -\vec{j} \sin\alpha + \vec{k} \cos\alpha$$

1°) a. Le vecteur $\vec{k'}$ étant donné, on considère une deuxième base orthonormée $B' = (\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ telle que $\vec{i'} = \vec{i}$ et $\vec{j'} = \vec{k'} \wedge \vec{i'}$.

Ecrire la matrice de passage de la base B à la base B' .

b. Ecrire la matrice associée à la rotation R dans la base B' .

c. En déduire la matrice associée à cette rotation dans la base B .

2°) Dans cette question, on se limite aux seules rotations R qui transforment le vecteur $\vec{u}$ en le vecteur $\vec{v}$.

a. Montrer qu'à toute valeur de α correspond une et une seule rotation R ayant cette propriété et calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de α .

.../...

b. On pose $\cos\alpha = \operatorname{tg}\varphi$ avec $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$

En déduire une expression de θ en fonction de φ, puis de θ en fonction de α.

c. Soit θ_o celle des valeurs de θ telle que $\theta_o \in [0, 2\pi]$. Etudier et représenter graphiquement les variations de la fonction

$$\alpha \longmapsto \theta_o(\alpha) \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

II

L'espace <u>affine</u> euclidien orienté de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé Oxyz, de vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On appelle A le point qui a pour coordonnées dans ce repère $(x_o, 0, 0)$, x_o étant un réel donné.

a étant un réel positif donné, on considère la droite D d'équations

$$x - y = 0 \qquad z - a = 0$$

et la droite D' d'équations

$$x + y = 0 \qquad z + a = 0$$

On désigne par $\vec{D}$ la droite D orientée par le vecteur $\vec{u}(1, 1, 0)$ et par $\vec{D'}$ la droite D' orientée par le vecteur $\vec{v}(-1, 1, 0)$.

On considère ensuite un deuxième repère orthonormé Ax'y'z' qui se déduit du repère Oxyz par la translation de vecteur $\vec{OA}$ suivie d'une rotation d'angle α autour de l'axe Ox.

1°) Exprimer les coordonnées (x, y, z) d'un point M de l'espace dans le repère Oxyz, en fonction de ses coordonnées (x', y', z') dans le repère Ax'y'z'.

2°) On désigne par R_1 la rotation affine d'angle θ, ayant pour axe Az'. Ecrire l'expression analytique de cette rotation,

a. dans le repère Ax'y'z' ;

b. dans le repère Oxyz.

3°) Le réel α étant supposé donné $(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$, montrer que l'on peut déterminer x_o et θ de façon que la rotation R_1 transforme la droite orientée $\vec{D}$ en la droite orientée $\vec{D'}$ et calculer $\cos\theta$, $\sin\theta$ et x_o en fonction de a et α.

4°) Lorsque α varie dans $\mathbb{R}$, l'axe Az' de la rotation R_1 qui transforme $\vec{D}$ en $\vec{D'}$ engendre une surface S. Ecrire l'équation cartésienne de cette surface dans le repère Oxyz.

5°) Les axes Az' des rotations R_1 précédentes constituent une famille de droites appartenant à la surface S.

a. Montrer qu'il existe sur S une deuxième famille de droites dont on peut mettre les équations sous la forme

$$x \cos\beta + z \sin\beta = 0 \qquad y \sin\beta - 2a \cos\beta = 0$$

β désignant un paramètre réel $(\beta \neq k\pi)$

b. Montrer - sans nouveaux calculs - que chacune de ces droites est aussi l'axe d'une rotation qui transforme la droite D en la droite D'. Quelle est l'image de la droite orientée $\vec{D}$ par cette rotation ?

6°) Déterminer l'ensemble des points de l'espace qui sont équidistants des deux droites D et D'. Comparer le résultat avec celui de la question 4.

III

Les données et les notations étant les mêmes que dans la partie II, on suppose que l'angle α est une fonction de classe C^1 du temps t et on pose $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$. x_o et θ ayant, en fonction de a et α, les valeurs trouvées à la question (II, 3°), on considère le solide (Σ) représenté par le repère AXYZ, déduit de Ax'y'z' par une rotation d'angle θ autour de Az'. Ce solide (Σ) est en mouvement par rapport au repère Oxyz supposé fixe.

1°) Exprimer les vecteurs unitaires $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ du repère AXYZ en fonction des vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2°) Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ du mouvement de (Σ).

a. par ses composantes (p, q, r) dans le repère fixe Oxyz ;

b. par ses composantes (P, Q, R) dans le repère mobile AXYZ.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail